

UFF/CEG/EGM – Instituto de Matemática	GMA – Departamento de Matemática Aplicada
<b>PROGRAMA DE DISCIPLINA</b>	

Disciplina: **Métodos Matemáticos Aplicados I**

Código: GMA06090

Ano: 2004

Carga Horária Semanal Total	<u>06</u>
Teórica <u>06</u>	Prática <u>00</u>

Carga Horária Semestral	<u>90</u>
Número de Créditos	<u>06</u>

### CONTEÚDO

#### **1 Série de Fourier**

- 1.1 Construção da série de Fourier.
- 1.2 Série de Fourier em senos e em co-senos.
- 1.3 Série de Fourier na forma complexa.
- 1.4 Série de Fourier em duas e em três variáveis.
- 1.5 Diferenciação e integração termo a termo.
- 1.6 Convergência. Identidade de Parseval.
- 1.7 Aplicação no cálculo de séries numéricas.

#### **2 Introdução às Equações Diferenciais Parciais (EDPs)**

- 2.1 Conceitos fundamentais: Definições de EDP, ordem, grau, solução geral, solução particular, EDP homogênea e EDP linear. Condições iniciais e de fronteira. Princípio da superposição.
- 2.2 EDPs com solução geral simplesmente obtida.
- 2.3 EDPs da Física Matemática: equações da onda (corda vibrante, membrana, som), da difusão (calor e massa), de Laplace e de Helmholtz ( $\nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0$ ).
- 2.4 Solução de d'Alembert para a equação da corda vibrante.

#### **3 Aplicação da Transformada de Laplace na Resolução de EDPs**

#### **4 O Método de Separação de Variáveis para a Resolução de EDPs**

- 4.1 Equação do calor numa barra de extremos a  $0^\circ \text{C}$  ou isolados termicamente.
- 4.2 Equação da corda vibrante com extremos fixos ou deslizantes em hastes verticais sem atrito.
- 4.3 Equação do calor numa placa retangular com bordas a  $0^\circ \text{C}$  ou isoladas termicamente.
- 4.4 Equação da membrana vibrante em moldura retangular.

#### **5 Série de Funções Ortogonais**

- 5.1 Ortogonalidade entre funções e expansão em funções ortogonais.
- 5.2 Problema de Sturm-Liouville: definição, condições de fronteira que garantem a ortogonalidade entre as autofunções, série de Fourier generalizada.
- 5.3 Série de Fourier generalizada dupla e tripla.
- 5.4 Outras séries de Fourier trigonométricas e sua aplicação na resolução de EDPs.

#### **6 Gradiente, Divergente e Laplaciano em Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas**

#### **7 Equações de Laplace e Helmholtz que se resolvem com Séries de Fourier Trigonométricas**

- 7.1 Questões de existência e unicidade da solução da equação de Laplace sob a condição de fronteira de Dirichlet ou a de Neumann.
- 7.2 Equação de Laplace num disco. O núcleo de Poisson.
- 7.3 Equação de Laplace num retângulo.
- 7.4 Equação de Laplace num paralelepípedo.
- 7.5 A equação  $\nabla^2 \psi + \lambda \psi(x, y, z) = 0$  (de Helmholtz) num retângulo e num paralelepípedo sob condições de fronteira homogêneas (problemas de autovalor em  $\lambda$ ).

**8 A Série de Fourier-Bessel e sua Aplicação na Resolução de EDPs**

- 8.1 Equação de Bessel e sua solução geral.
- 8.2 Equação de Bessel modificada e sua solução geral.
- 8.3 Conjuntos ortogonais de funções de Bessel  $J_\nu(\zeta_{\nu n} r/R)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), sendo  $J_\nu(\zeta_{\nu n}) = 0$  (condição homogênea de Dirichlet) ou  $J'_\nu(\zeta_{\nu n}) = 0$  (condição homogênea de Neumann).
- 8.4 Série de Fourier-Bessel.
- 8.5 Equação do calor num cilindro infinito com sua superfície a  $0^\circ \text{C}$  ou isolada termicamente.
- 8.6 Equação da membrana vibrante em moldura circular.
- 8.7 A equação  $\nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0$  (de Helmholtz) num disco e num cilindro sob condições de fronteira homogêneas (problemas de autovalor em  $\lambda$ ).
- 8.8 Cálculo da temperatura estacionária num cilindro finito, sendo dados a temperatura ou o fluxo de calor na superfície.

**9 A Série de Legendre e sua Aplicação na Resolução de EDPs**

- 9.1 Equação de Legendre e sua solução geral.
- 9.2 Conjuntos ortogonais de polinômios de Legendre  $P_n(x)$  para  $x \in [-1, 1]$  ou  $x \in [0, 1]$ .
- 9.3 Série de Legendre.
- 9.4 Cálculo da temperatura estacionária em esferas ou semi-esferas, sendo dados a temperatura ou o fluxo de calor na superfície com simetria azimutal.

**10 A Equação de Helmholtz e de Laplace em Coordenadas Esféricas**

- 10.1 Separação ângulo-radial da equação de Helmholtz.
- 10.2 Polinômios de Legendre associados.
- 10.3 Harmônicos esféricos: definição, série e teorema da adição.
- 10.4 Funções de Bessel esféricas.
- 10.5 Solução geral das equações de Helmholtz e de Laplace em série de harmônicos esféricos.
- 10.6 Cálculo da temperatura estacionária em esferas, sendo dados a temperatura ou o fluxo de calor na superfície.
- 10.7 A equação  $\nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0$  (de Helmholtz) numa esfera sob condições de fronteira homogêneas (problemas de autovalor em  $\lambda$ ).

**11 Equações do Calor e da Onda em Três Dimensões e Métodos Elementares de Resolução de Problemas Não-Homogêneos**

- 11.1 Equações do calor e da onda no paralelepípedo, no cilindro e na esfera.
- 11.2 Métodos de homogeneização de problemas unidimensionais de calor e onda (nos quais a interrupção da homogeneidade se dá na equação e/ou nas condições de fronteira).

**12 Coordenadas Curvilíneas e a Convenção de Einstein para Somatórios**

- 12.1 Coordenadas e versores curvilíneos.
- 12.2 Elementos de comprimento de arco, de área e de volume.
- 12.3 Gradiente, divergência, rotacional e laplaciano.
- 12.4 A convenção de Einstein para somatórios, o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita: definição e aplicação na expressão dos produtos escalar e vetorial, das operações diferenciais  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$ ,  $\nabla^2$  e combinações bem como no cálculo rudimentar com matrizes  $3 \times 3$  (operações elementares, determinantes, cofatores e inversão de matrizes).

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- E. Butkov – Física Matemática, LTC Editora S.A., 1988.
- M. R. Spiegel – Análise de Fourier, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda.
- E. Kreyszig – Matemática Superior, Vol. 3, LTC Editora S.A., 1969.
- R.V.Churchill & J.W.Brown – Fourier Series and Boundary-Value Problems, 3rd. ed., McGraw-Hill Book Co., 1978.
- D. Kreider et al. – Introdução à Análise Linear, Ed. Ao Livro Técnico S.A.
- F. B. Hildebrand – Advanced Calculus for Applications, 2nd ed., Prentice-Hall, 1976.
- R. E. Williamson et al. – Cálculo de Funções Vetoriais, Vol. 2, LTC Editora S.A., 1975.
- F. W. Byron, Jr., and R. W. Fuller – Mathematics of Classical and Quantum Physics, Dover Publications, 1992.
- M. R. Spiegel – Análise Vetorial, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1977.