30 de abril 2021

Homenagem a Saponga: estabilidade da fibra duma fibração

Teorema: (Seifert 1950) Considere $\pi: S^3 \to S^2$ a fibração de Hopf de fibra S^1.

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, X$ campo de vectores em S^3,

- $\mathrm{Zero}(X) = \emptyset$
- $\hat{\mathrm{A}}\mathrm{ngulo}(X, \text{fibras}) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ X tem uma orbita periodica perto de uma fibra.

em outras palavras: dada qualquer perturbação do campo unitario tangente a fibração de Hopf, pelo menos 1 fibra resistiú.

- a mesma prova funciona para $\pi: M^3 \to S$, S superficie $\chi(S) \neq 0$, de fibra S^1
- Fuller (1967) generalizou para $\pi: M \to B$, $\chi(B) \neq 0$, fibra S^1.

Porque esse resultado era importante?:

- M variedade compacta sem bordo. X campos de vectores.

$$\chi(M) = \sum_{x \in \mathrm{Zero}(X)} \mathrm{ind}(X, x)$$

- $f: M \to M$ homeo $\rightsquigarrow$ formula de Lefschetz para pontos fixos

teoria do indice para orbitas periodicas de campos de vectores?

$\exists\, M$ tal que qualquer campo não singular tem orbitas periodicas? em S^3? (conjectura de Seifert)

- a resposta a primeira pergunta é: Sim! :
  a prova de Fuller é uma teoria do índice:
  ele prova $\sum \mathrm{ind}\left(\begin{smallmatrix}\text{órbitas perto}\\ \text{de uma fibra}\end{smallmatrix}\right) = \chi(B)$

- a resposta a segunda pergunta é ....
  S^1 e K (garrafa de Klein) são as únicas variedades M com $\chi(M)=0$, tais que X não singular $\Rightarrow \exists$ órbita periódica.

Teorema (Wilson Annals 1966) $\forall M$, $\dim M \geq 4$, $\chi(M)=0 \Rightarrow$
$\exists X$ em M sem órbitas periódicas.
$\Omega(X)$ = número finito de toros com fluxo irracional.

Teorema (Schweitzer Annals 1974, Kuperberg Annals 1994) $\forall M^3$,
$\exists X$ em M sem órbita periódica.

Porque esse resultado era importante para Saponga? (e para mim).
com Suely Druck, Saponga e eu queríamos generalizar o teorema de Seifert para outras fibras:

- fibras F com $H_1(F,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. (com ideias de Thurston, Rosenberg & Langevin)

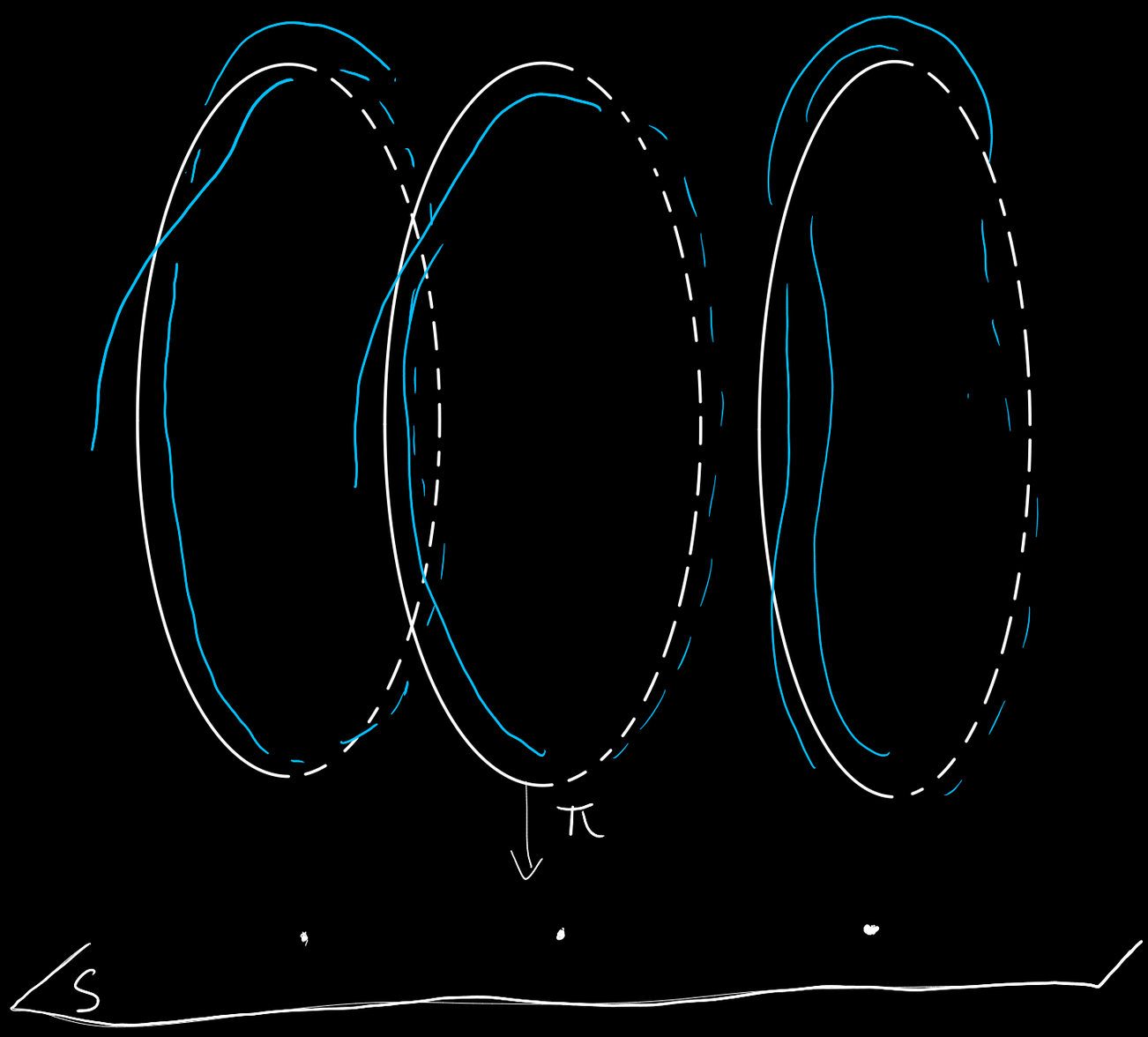
- fibras T^n : $B \times T^n \to B$.
  estabilidade da fibra $T^n \iff$ existência de pontos fixos comuns para difeos que comutam, perto da identidade, em B

Teorema (B-., Saponga Topology 1990, 2005 N.L. = Furmo) S superfície com $\chi(S) \neq 0$.
$\exists\, \mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(S)$ C^1-vizinhança de Id,
$\forall G$ grupo abeliano gerado por elementos em $\mathcal{U}$,
$$\exists x \in S \qquad x \in \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}\, g$$

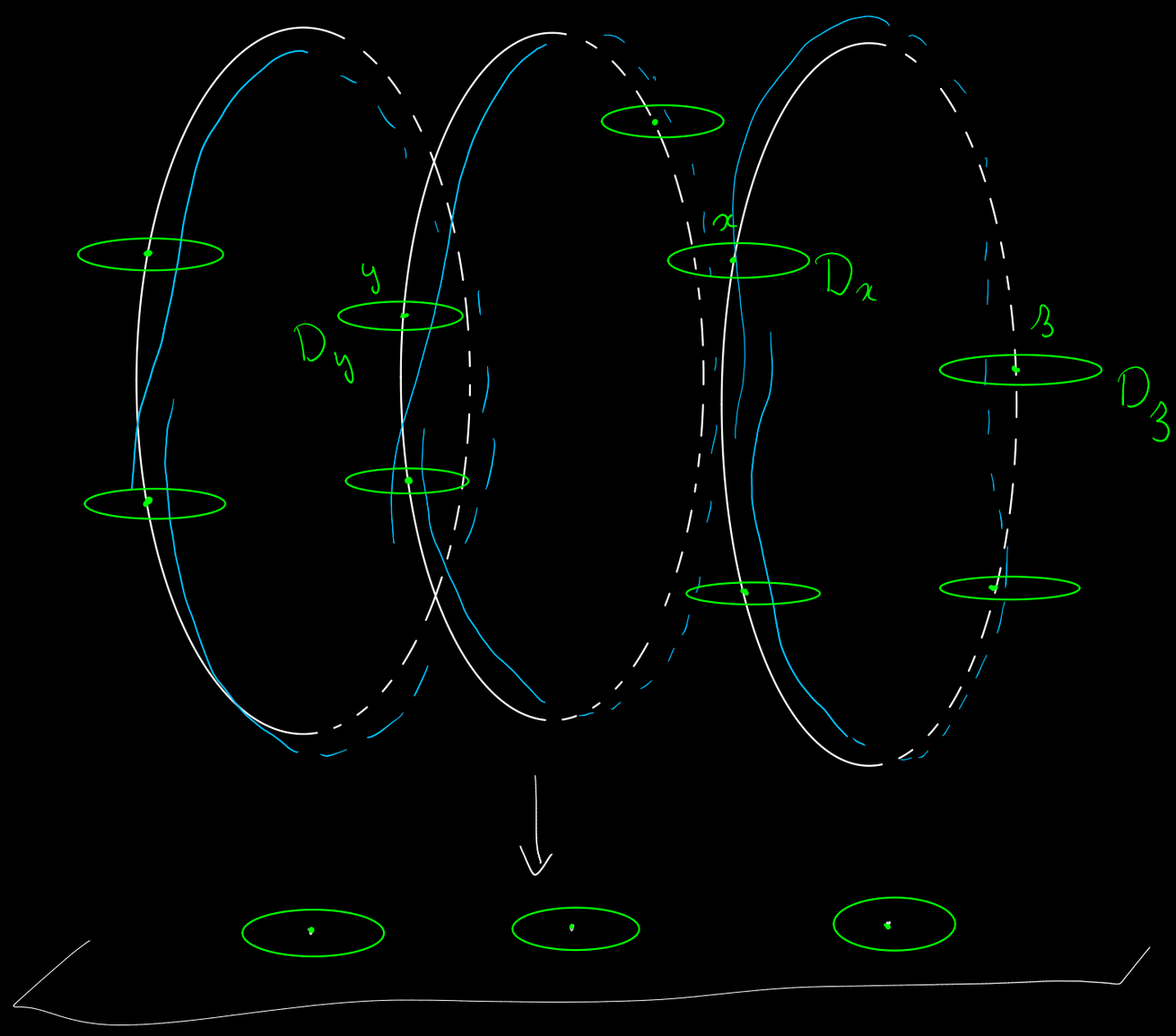
Prova do teorema de Seifert (Suely Druck & Saponga):

- $\pi : M^3 \to S$ fibração, fibra S^1, $\chi(S) \neq 0$
- Z campo unitario tangente as fibras.
- X C^1-perto de Z

$\Rightarrow$ X tem uma orbita periodica $\simeq$ fibra.



Um campo de discos transversos a fibração.

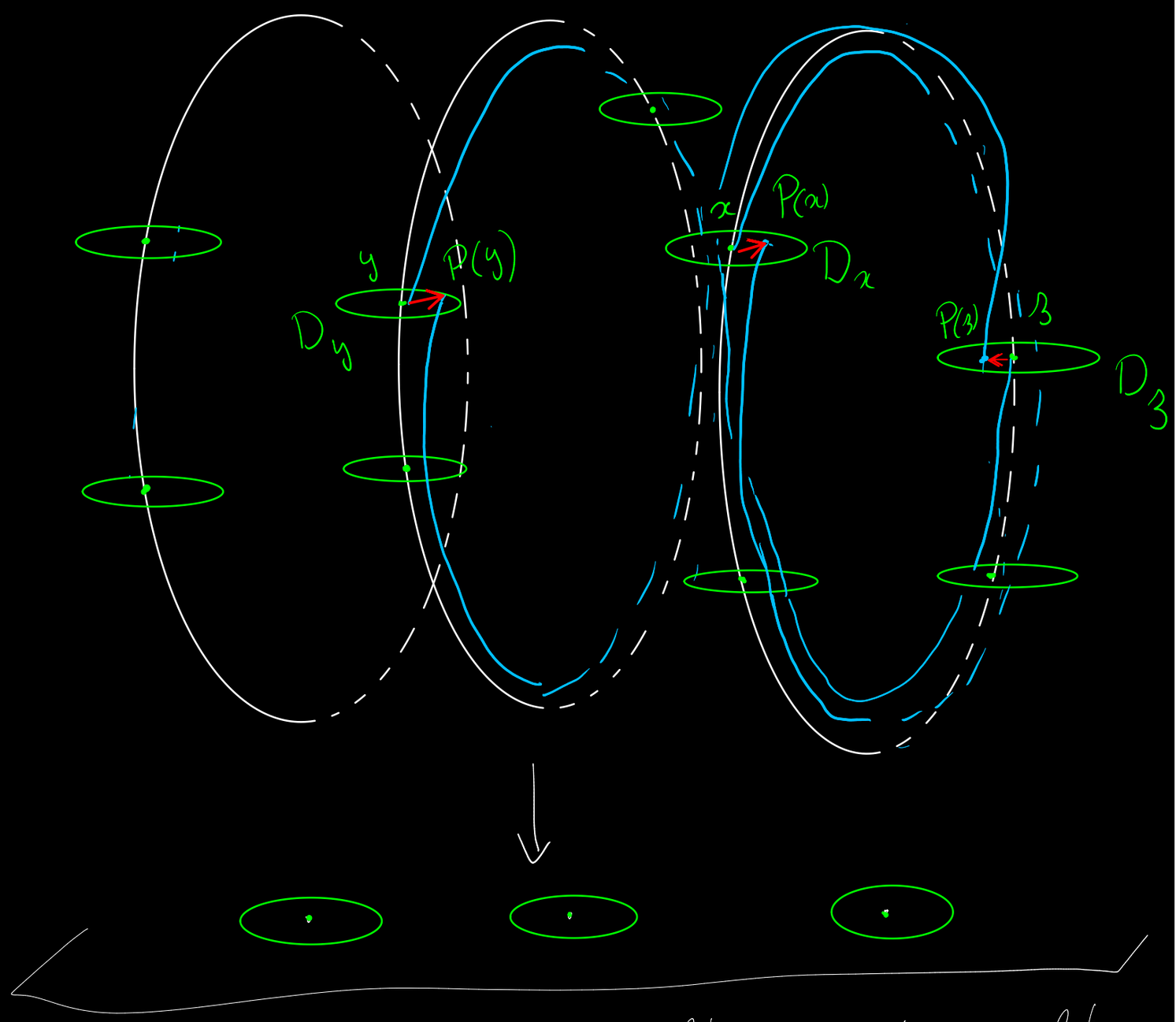


- fixamos 2 discos $\Delta_0 \subset \operatorname{int} \Delta_1 \subset S$.

$$\pi^{-1}(\Delta_1) \simeq \Delta_1 \times S^1$$

$$\boxed{\text{pedimos que } D_x \subset \Delta_1 \times t \text{ para } x = (p,t) \in \Delta_0 \times S^1}$$

O campo de discos permite definir o primeiro retorno de X nos discos



- um ponto $x \in Fix(P) \iff$ a órbita de x é uma órbita periódica perto de uma fibra.
- P é C^1-perto da identidade.

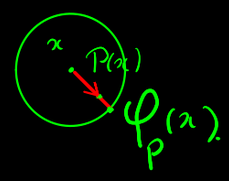
A prova é pelo absurdo: assumimos que X não tem órbita periódica perto de uma fibra

$$Fix(P) = \emptyset$$

a todo $p \in S$ associamos $\varphi_p : S^1 \to S^1 = T_p^1(S)$

$x \longmapsto$

fibra $\pi^{-1}(p)$



$\varphi_p(x) \in T_p^1(S)$ é o vector unitario que dirige o segmento geodesico $[p = \pi(x), \pi(P(x))]$

lema: $\forall p \in S$ φ_p é homotopica a constante.

prova do teorema, assumindo o lema:

dado $\varphi : S^1 \to S^1$ homotopico a zero associamos um ponto $\Theta(\varphi) \in S^1$ da maneira seguinte:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}(S^1)$ e um intervalo $[a, b]$.

$\Theta(\varphi) = \pi\left(\frac{a+b}{2}\right)$ não depende de $\tilde{\varphi}$.

assim $\boxed{p \in S \longmapsto \Theta(\varphi_p) \in T^1 S}$

$\Theta(\varphi_p)$ é um campo de vectores, continuo, não nulo em S.

isso contradiz $\chi(S) \neq 0$.

$\square$

<u>prova do lema.</u> a classe de homotopia de φ_p não depende de $p \in S$. podemos escolher $p \in \Delta_0$

a astucia é de calcular a classe de homotopia sobre outra curva.

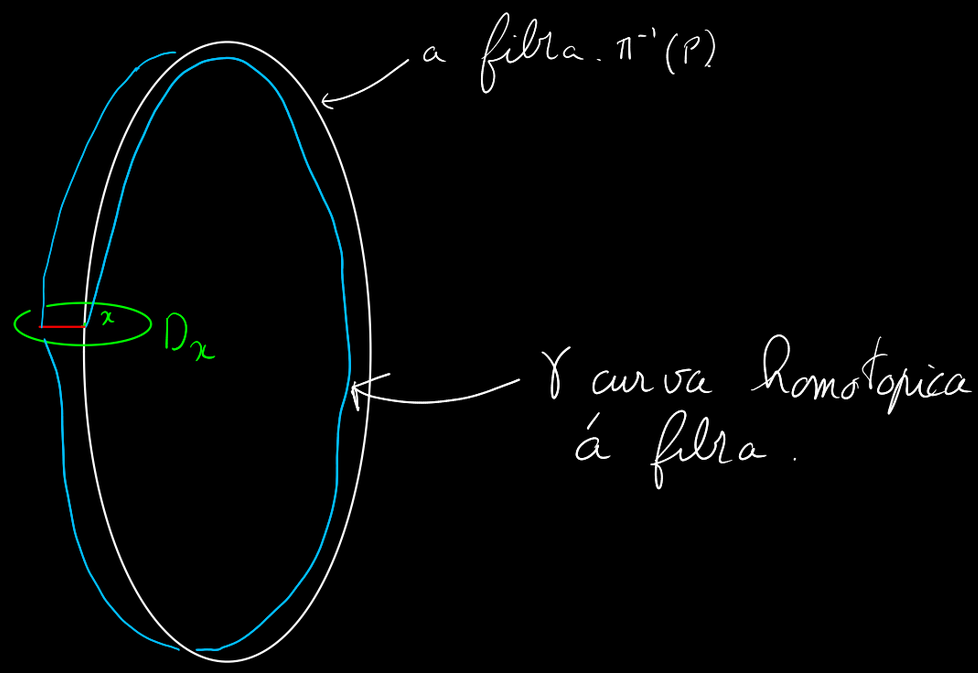
Em cima de $\Delta_0 \subset \operatorname{int} \Delta_1$

$$P : \Delta_0 \times S^1 \longrightarrow \Delta_1 \times S^1$$
$$(p, t) \longmapsto (P(t), t)$$

$$\boxed{\gamma : S^1 \hookrightarrow \Delta_0 \times S^1 \longrightarrow \varphi_\gamma : \begin{array}{l} S^1 \longrightarrow S^1 \\ t \longmapsto \dfrac{\overrightarrow{\gamma(t) P(\gamma(t))}}{\| \overrightarrow{\gamma(t) P(\gamma(t))} \|} \end{array}}$$

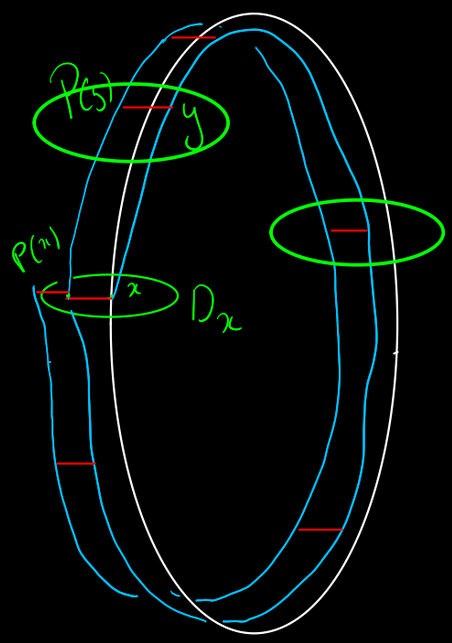
a classe de homotopia de φ_γ so depende da classe de homotopia de γ.

Vamos escolher a curva seguinte:



- seguimos a orbita de x por X de x até $P(x)$: $[x, P(x)]_X$,
e depois
seguimos o segment geodesico em D_x de $P(x)$ ate x
$[P(x), x]_{geodesico}$.

<u>Nota</u>: a curva fechada γ é homotopica, em $\Delta_0 \times S^1$ á fibra $\pi^{-1}(P)$.

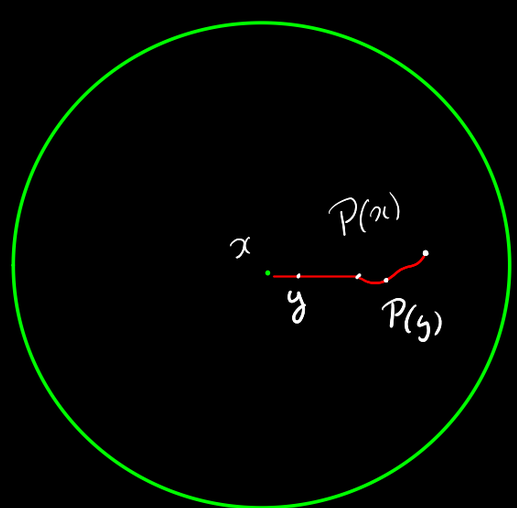


lema: o vector $\overrightarrow{y\,P(y)}$ é quase constante para $y \in \gamma$

- $y \in [x, P(x)]_X$,

  $P_y : D_y \to D_y$ é conjugado à $P_x : D_x \to D_x$ por a holonomia de X, que é "C^1-perto da identidade

- $y \in [x, P(x)]_{geodesico}$: $P_x : D_x \to D_x$ é C^1-perto da identidade, $\to$ quase uma translação.



o vector $\overrightarrow{y\,P(y)}$ é quase constante ao longo de $[x, P(x)]_{geodesico}$.

corolario $\varphi_\gamma : S^1 \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto \dfrac{\overrightarrow{\gamma(t)\,P(\gamma(t))}}{\|\overrightarrow{\gamma(t)\,P(\gamma(t))}\|}$ é homotopica a uma constante.

- como γ é homotopica a fibra $\pi^{-1}(P)$ obtemos $\varphi_\gamma \sim 0 \Rightarrow \varphi_P \sim 0$, concluindo $\square$

Perguntas abertas ligadas ao tema

Pergunta 1: Existe campos minimais (toda orbita densa) em S^3?

- Vimos a estabilidade da fibra da fibração trivial

$$S \times \mathbb{T}^2 \to S \quad , \quad S \text{ superficie}, \chi(S) \neq 0.$$

Tem um exemplo de fibração não trivial

$$M^4 \to S \quad , \text{ fibra } \mathbb{T}^2, \quad \chi(S) \neq 0$$

com fibra instavel.

Pergunta 2: qual são as fibrações $M^4 \to S$, fibra $\mathbb{T}^2$, $\chi(S) \neq 0$ tais que a fibra é instavel?

Publicidade

A prova apresentada acima se encontra em

"Feuilletages proches d'une fibration"

Ensaios matematicos, vol 5, 1993.

Capitulo 5 paginas 143 → 152